Doubt Yourself

India National Mathematical Olympiad 2023
Problem 6

André Pinheiro

Junho de 2023

Problema 6: Euclides tem uma ferramenta chamada *cyclos* que lhe permite fazer o seguinte:

- Dados três pontos marcados não colineares, desenhe uma circunferência passando por eles.
- Dados dois pontos marcados, desenhe uma circunferência com eles como extremidades de um diâmetro.
- Marque quaisquer pontos de interseção de duas circunferências desenhadas ou marque um novo ponto numa circunferência desenhada.

Mostre que dados dois pontos, Euclides pode desenhar uma circunferência centrada em um desses pontos e que passe pelo outro ponto, usando apenas o *cyclos*.

Proposto por Rohan Goyal, Anant Mudgal e Daniel Hu

Caminho da solução

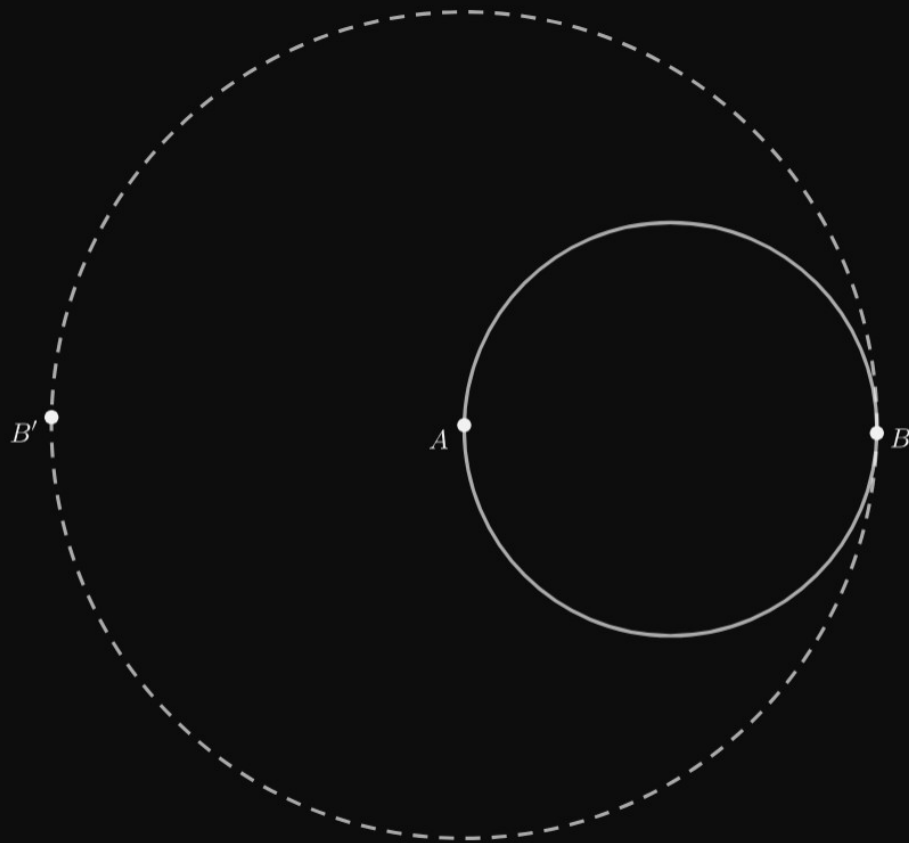
Primeira coisa que pensei é ver o problema “de trás para frente”, ou seja, como posso formar essa circunferência do problema?

Seja A e B dois pontos do plano e B’ a reflexão de B sobre A. O que queremos é formar uma circunferência centrada em A e que passe por B.

Há duas opções que pensei:

Construir duas circunferência com o *cyclos* tais que sua interseção resulte em B’

Construir duas vezes duas circunferência com o *cyclos* tal que sua interseção pertence a circunferência que queremos.

Obtei por pela primeira aproximação.

Caminho da solução

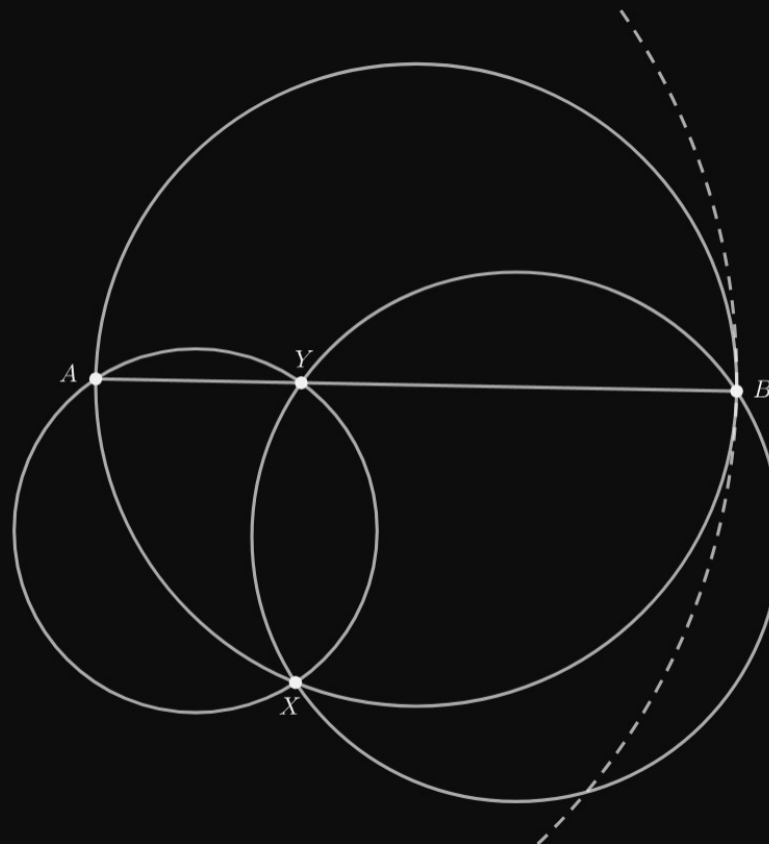
Com o cyclos, construimos a cirnuferência (AB).

Seja X um ponto arbitrário em (AB).

Construímos as circunferências (AX) e (XB).

(AX) e (XB) intersetam-se novamente em Y.

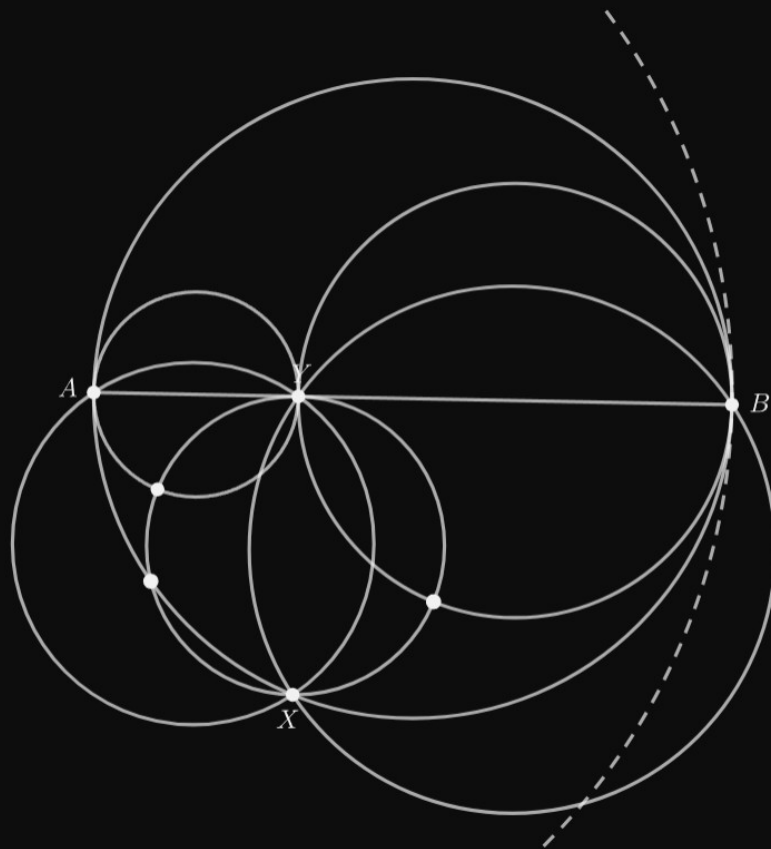
Repare que Y pertence ao segmento de reta AB, já que $\angle$AYX = $\angle$BYX.

Isto significa que **podemos marcar um ponto arbitrario no segmento AB apenas com o *cyclos*.**

Caminho da solução

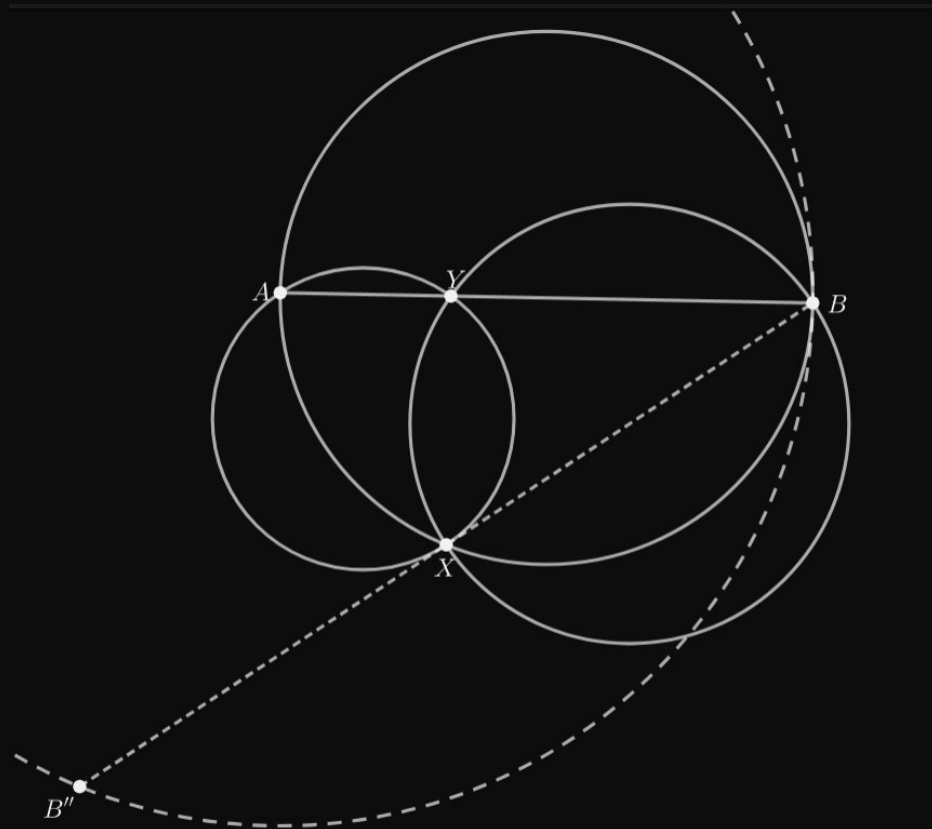
Com o cyclos, construimos a cirnuferência (AB).

Seja X um ponto arbitrário em (AB).
Construímos as circunferências (AX) e (XB).
(AX) e (XB) intersetam-se novamente em Y.
Repare que Y pertence ao segmento de reta AB, já que $\angle AYX = \angle BYX$.

Isto significa que **podemos marcar um ponto arbitrario no segmento AB apenas com o cyclos**.

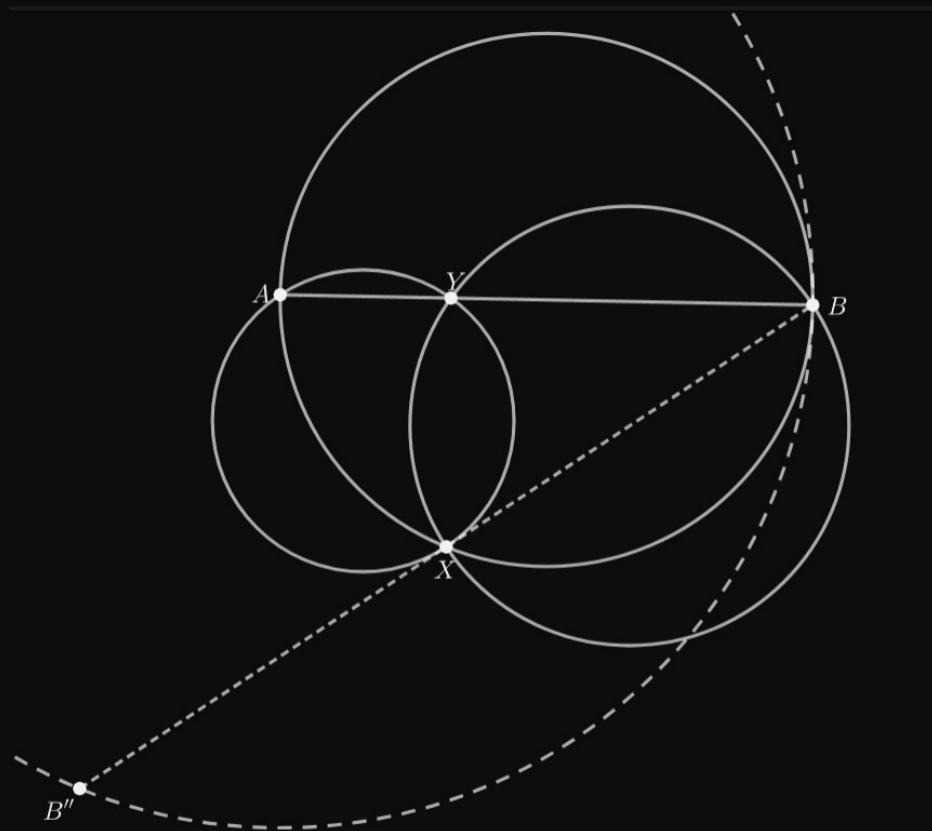
A partir daqui, meu plano era construir pontos que permitissem construir uma circunferência que passasse por B', mas ao fim de umas horas, não encontrei dada de interessante e abandonei essa aproximação para o problema.

Caminho da solução

A aproximação agora é construir duas vezes duas circunferência com o *cyclos* tal que sua interseção pertença à circunferência que queremos.

Uma maneira pela qual podemos fazer isso é refletir o ponto B em relação a X, no qual obtemos B'', isto porque $\angle AXB = 90$ e o triângulo AB'B'' é isósceles.

Caminho da solução

A aproximação agora é construir duas vezes duas circunferência com o cyclos tal que sua interseção pertença à circunferência que queremos.

Uma maneira pela qual podemos fazer isso é refletir o ponto B em relação a X, no qual obtemos B'', isto porque $\angle AXB = 90$ e o triângulo AB'B'' é isósceles.

Repare também que, pelo que descobrimos pela primeira aproximação, podemos construir os pés da perpendicular de um triângulo usando apenas os *cyclos* e portanto podemos construir o ortocentro do triângulo!

Caminho da solução

Proposição 1: Dado um triângulo ABC, podemos construir o seu ortocentro usando apenas o *cyclos*.

Prova:

Seja ABC um triângulo.

As interseções das circunferências (AB) e (AC) intersetam-se em D, (AB) e (BC) em E e (BC) e (CA) em F.

D, E e F são os pés das perpendiculares de A, B, C, respetivamente.

Pelo teorema de Miquel, as circunferências (AFE), (BFD) e (CDF) intersetam-se num único ponto, que é o ortocentro e assim está mostrado. □

Caminho da solução

Proposição 1: Dado um triângulo ABC, podemos construir o seu ortocentro usando apenas o *cyclos*.

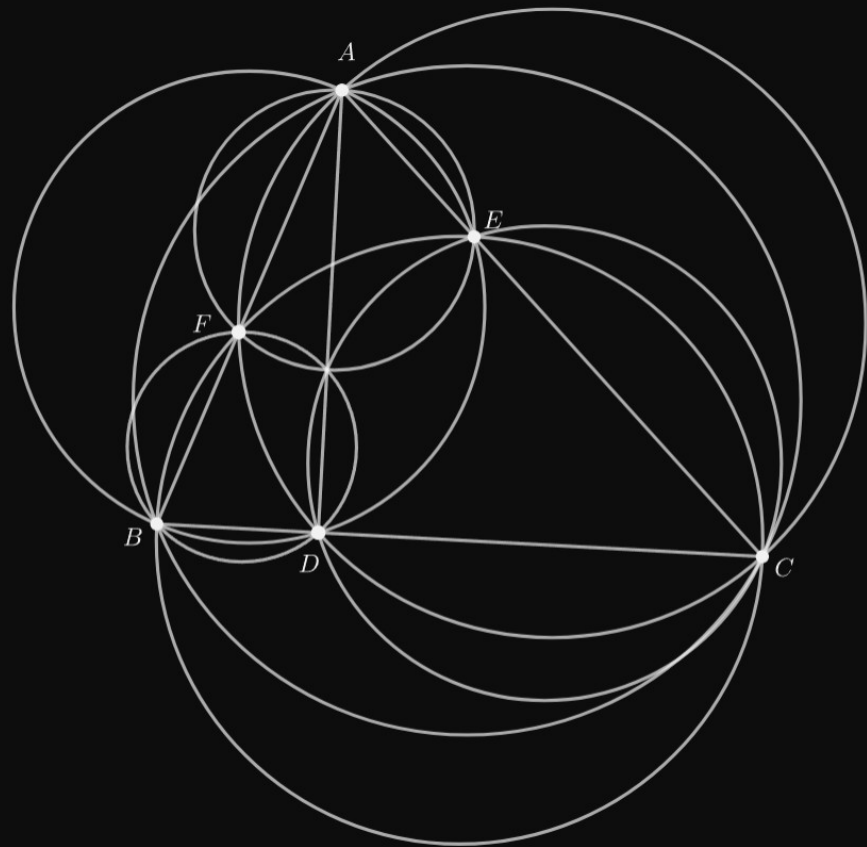
Prova:

Seja ABC um triângulo.

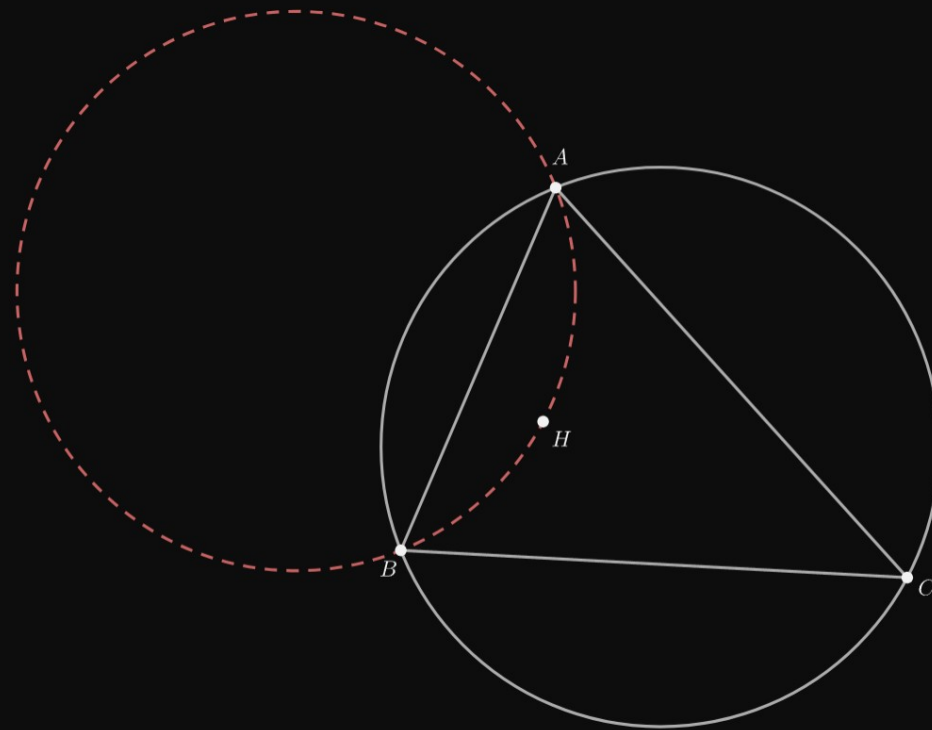
As interseções das circunferências (AB) e (AC) intersetam-se em D, (AB) e (BC) em E e (BC) e (CA) em F.

D, E e F são os pés das perpendiculares de A, B, C, respetivamente.

Pelo teorema de Miquel, as circunferências (AFE), (BFD) e (CDF) intersetam-se num único ponto, que é o ortocentro e assim está mostrado. □

Agora, dado que podemos construir o ortocentro, podemos usar um lema bastante importante!

Lema 1

Lema 1: Seja ABC um triângulo e H o ortocentro do mesmo. A circunferência que passa por dois vertices do triângulo e pelo ortocentro tem o mesmo raio que o circuncírculo (ABC).

A demonstração deste lema fica como exercício ao leitor.

Lema 1

Lema 1: Seja ABC um triângulo e H o ortocentro do mesmo. A circunferência que passa por dois vertices do triângulo e pelo ortocentro tem o mesmo raio que o circuncírculo (ABC).

A demonstração deste lema fica como exercício ao leitor.

Este lema permite trabalhar com reflexões de circunferências em relação a um eixo, o que poderá ajudar.

Caminho da solução

Sejam X e Y dois pontos arbitrários de (AB) tal que o ângulo AXY seja agudo.

Como o ortocentro é construtível, seja H_1 e H_2 os ortocentros dos triângulos BXY e AXY, respetivamente.

Agora, repare que as circunferências (H_2AX) e (H_2AY) são tangentes a circunferência que queremos.

Falta agora construir mais duas circunferências de tal forma que elas intersetam no pontos de tangência.

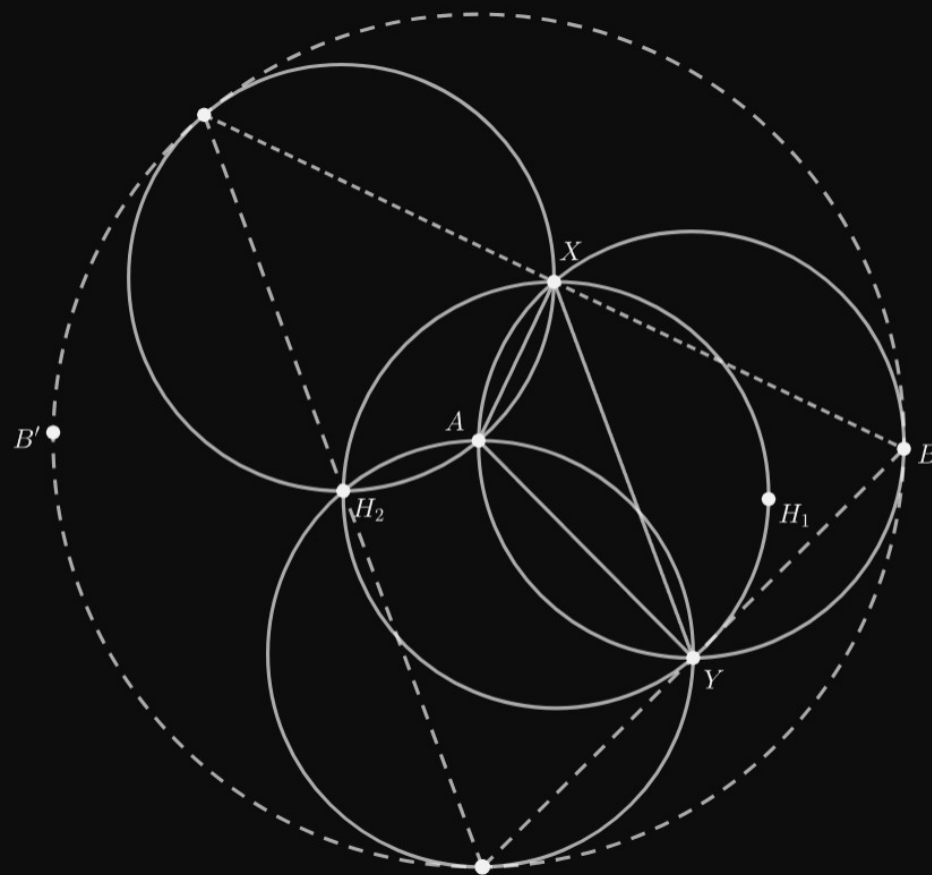
Caminho da solução

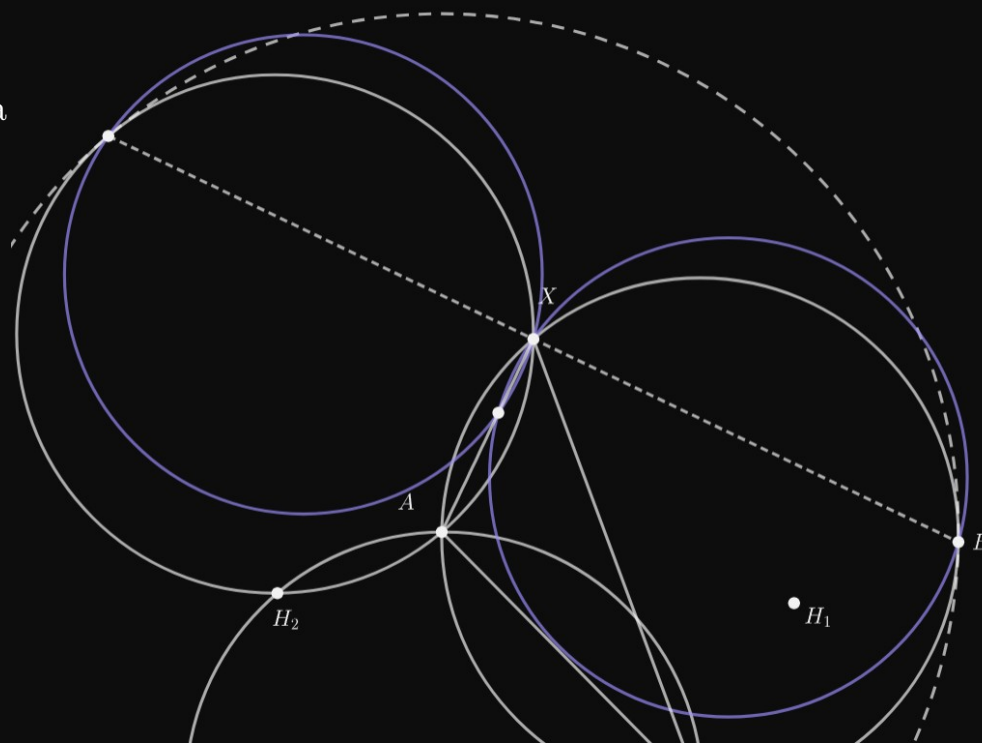
Sejam X e Y dois pontos arbitrários de (AB) tal que o ângulo AXY seja agudo.

Como o ortocentro é construtível, seja H_1 e H_2 os ortocentros dos triângulos BXY e AXY, respetivamente.

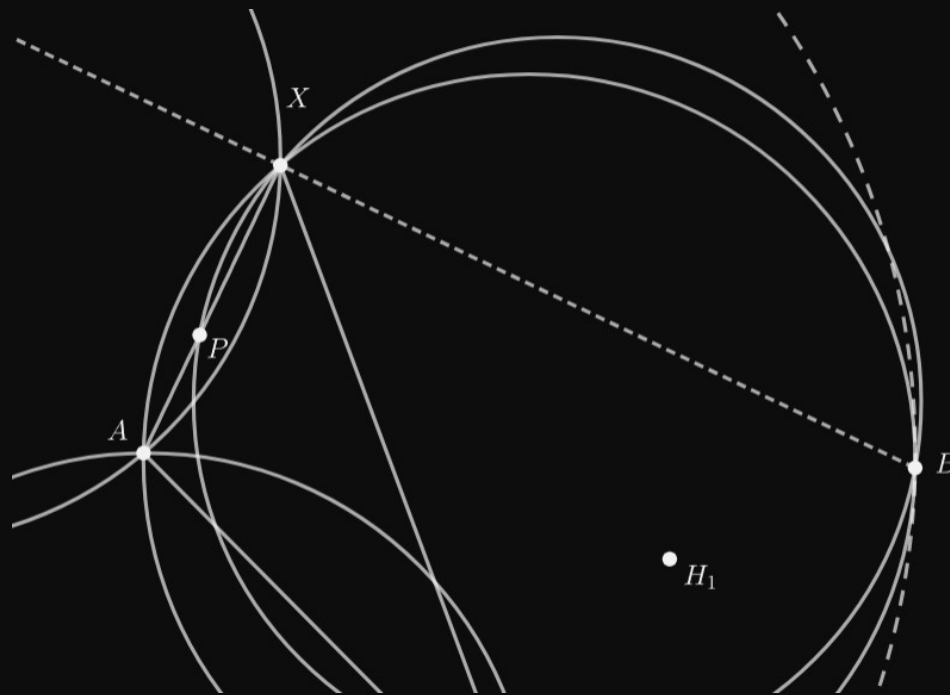
Agora, repare que as circunferências (H_2AX) e (H_2AY) são tangentes a circunferência que queremos.

Falta agora construir mais duas circunferências de tal forma que elas intersetam no pontos de tangência.

Tendo isso em mente, comecei a explorar o triângulo formado pelos pontos de tangência. Passado algum tempo, não consegui construir os pontos que queria para formar as circunferências e desisti dessa aproximação.

Caminho da solução

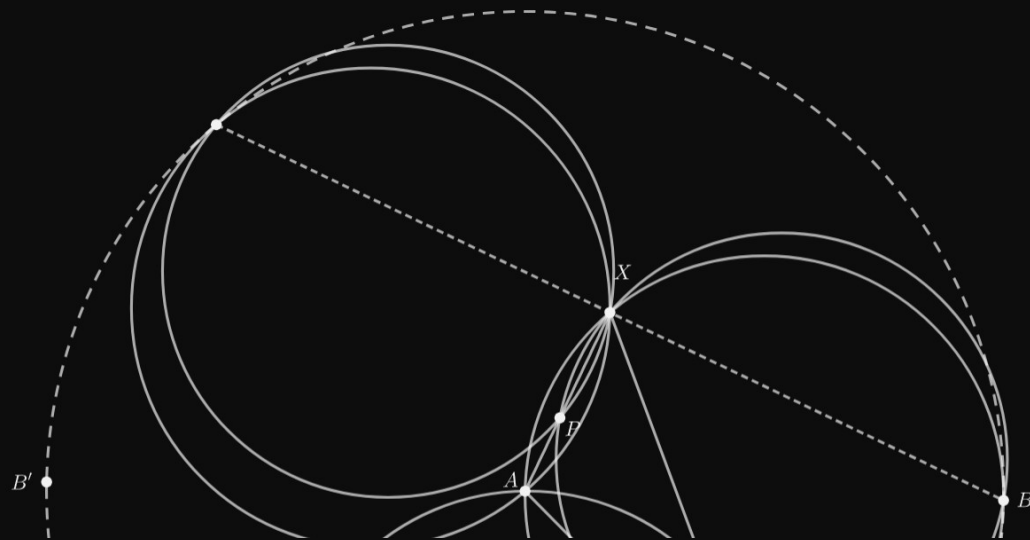
Repare que se conseguisse criar um ponto em AX, por exemplo K, poderia construir a circunferência (KXB) e fazer a reflexão da mesma em relação a ao eixo AX. Esta foi a minha aproximação final.

Caminho da solução

Repare que se conseguisse criar um ponto em AX, por exemplo K, poderia construir a circunferência (KXB) e fazer a reflexão da mesma em relação a ao eixo AX. Esta foi a minha aproximação final.

Para construir esse ponto, podemos projetar H_1 sobre AX, com a interseção das circunferências (XH_1) e (AH_1). Assim, podemos construir a circunferência (PXB).

Caminho da solução

Repare que se conseguisse criar um ponto em AX, por exemplo K, poderia construir a circunferência (KXB) e fazer a reflexão da mesma em relação a ao eixo AX. Esta foi a minha aproximação final.

Para construir esse ponto, podemos projetar H_1 sobre AX, com a interseção das circunferências (XH_1) e (AH_1). Assim, podemos construir a circunferência (PXB).

Dessa forma, basta escolher um ponto arbitrário em (PXB), por exemplo K, construir o ortocentro do triângulo KPX e usar o lema 1 para obter outra circunferência que interseta (H_2AX) no ponto de tangência!

Caminho da solução

Repetindo o mesmo processo com a circunferência (H_2AY), obtemos o nosso segundo ponto T_2.

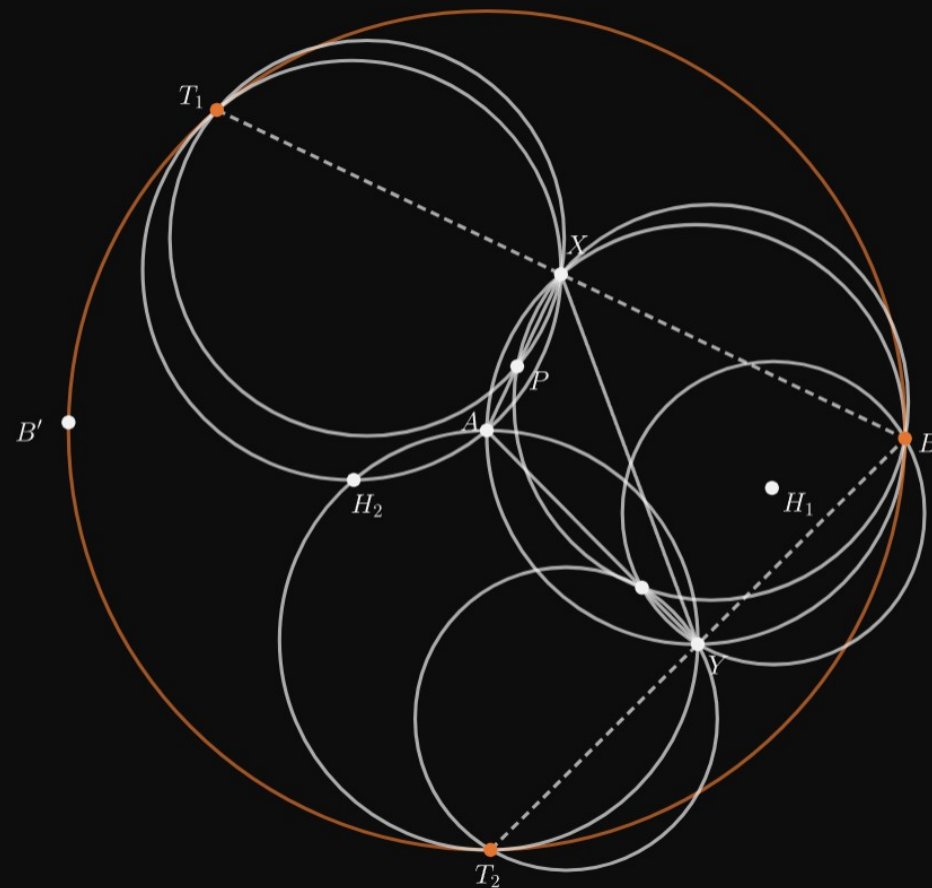
Como $T_1X = XB$ e $BY = YT_2$, por homotetia, (T_1T_2B) é a circunferência centra em A e que passa por B, tal como queríamos mostrar. □

Solução

Diagrama no GeoGebra:

- Do problema: https://www.geogebra.org/calculator/tsvqtpgh
- Do Lema: https://www.geogebra.org/calculator/dutcydwu
- Soluções no AOPS: https://artofproblemsolving.com/community/c6h2995081p26888633